Estabelecendo uma Quantidade Infinita de Métodos de Construção de Quadrados Mágicos de Ordens Ímpares e Quadrados Mágicos Concêntricos a partir de uma Nova Generalização do Luo Shu

Lohans de Oliveira Miranda
Secretaria de Educação do Estado do Piauí
Teresina, Piauí, Brasil
lohansmiranda@gmail.com

Lossian Barbosa Bacelar Miranda
IFPI
Teresina, Piauí, Brasil
lossianm@gmail.com

***Abstract*— Estabelecemos uma nova generalização do quadrado mágico Luo Shu e, a partir dela, estabelecemos uma quantidade infinita de métodos de construção de quadrados mágicos e de quadrados mágicos não normais concêntricos. Os quadrados mágicos de todas as ordens ímpares que generalizam o Luo Shu, bem como os seus quadrados mágicos não-normais concêntricos internos, têm constantes mágicas ou totais que são múltiplos da média aritmética, (n^2+1)/2, de todos os números que formam o quadrado mágico de ordem n. Esses quadrados mágicos são tabuadas de adição naturais.**

Keywords—Nova generalização do Luo Shu, Quadrados mágicos concêntricos, Quadrados mágicos não-normais, Aproximações multifárias, Sinologia

I. INTRODUCTION

Nazareno Fonteles faz uma sistematização de que os conhecimentos ocorrem por aproximações multifárias, inclusive na Matemática ([13], p. 23). Na visão usual o mais exato dos conhecimentos seria a aritmética dos números naturais positivos e, dentro desse estudo, a classificação dos quadrados mágicos é o problema aberto mais antigo, tendo mais de 4423 anos, remontando à lenda de Hetu Luo Shu (Cf. [21]). Por ocasião do reconhecimento estatal do quadrado mágico de Luo Shu sob a Presidência de Xi Jinping, foi estabelecido que o mesmo, como parte da raiz da cultura chinesa, “It has influence on the way of thinking and behavior of the Chinese people” ([22], p. 4).

Historicamente, a nossa pesquisa está vinculada aos estudos filosóficos de Nazareno Fonteles pois, apesar das ideias embrionárias das quais ele trata serem antigas, a contundência de sua sistematização nos fez revisar nossos conhecimentos formais sobre o primeiro quadrado mágico da história. Em [16] nós estivemos na difícil situação de ter que decidir se havíamos ou não descoberto uma infinidade de métodos de quadrados mágicos. Em [12] estabelecemos uma definição de método de construção de quadrados mágicos mas, os autores ainda não falam numa linguagem única, significando que no próprio estabelecimento do conceito os autores ainda estão se aproximando de uma definição, corroborando o pensamento filosófico sistematizado de Nazareno Fonteles. Em trocas de e-mails com Ahmad Hajj Diab, o mesmo nos disse que a definição de método seria um problema filosófico. Esse pesquisador, o qual fez, recentemente, notável estudo sobre o método LUX de John Horton Conway (www.academia.edu/96613065), já apontava na direção da importância da sistematização de Nazareno Fonteles para o estudo dos quadrados mágicos. As descobertas no estudo dos quadrados mágicos (problema rústico e ancestral, [3]), mormente os vários métodos, são ainda enigmáticos e mágicos. Dentro da epistemologia de Nazareno Fonteles aplicada ao estudo dos quadrados mágicos essa nossa nova generalização do quadrado mágico de Luo Shu seria consequência do Princípio Holístico de Pascal Aproximado ([13], p. 105). O difícil de explicar, conforme [1], é a razão pela qual alguns matemáticos têm mais intuição para descobrir métodos de construção de quadrados mágicos do que outros. Seguiremos as notações de [2].

II. Conceitos Básicos e Notações

Um quadrado mágico de ordem $n = 2k + 1; k \in \mathbb{N}^*$ é uma matriz quadrada formada por todos os números $1, 2, 3, \dots, n^2$ e tal que a soma dos números de cada linha, cada coluna e cada uma das duas diagonais é igual a $c_n = \frac{n^3+n}{2}$. *Chamamos c_n de constante mágica. Um quadrado mágico de ordem n é não normal quando as somas dos números nas linhas, colunas e diagonais são todas iguais, porém, não iguais a $c_n = \frac{n^3+n}{2}$ ou o conjunto dos números que o formam não é $I_{n^2} = \{1, 2, 3, \dots, n^2\}$. Chamamos as mencionadas somas de totais.*

Nós denotamos:

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & \cdots & l_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix} = \left(l_{r,s}\right)_{r,s \in I_n = \{1,2,3,\dots,n\}} \qquad (1)$$

III. Generalização do Quadrado Mágico Luo Shu

Em quase todas as pesquisas que fizemos relacionadas aos quadrados mágicos (Cf. [1], [3]-[12], [14]-[20]) nós usamos fortemente as progressões aritméticas, imitando o quadrado mágico Luo Shu.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Quadrado mágico Luo Shu

Proposição 1. Sejam $a = 3k + 1$ e $b = n^2 - 3k$. Então, a matriz $L = \left(l_{r,s}\right)_{r,s \in I_n = \{1,2,3,\dots,n\}}; n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, de ordem n a seguir definida é um quadrado mágico.

$$l_{r,s} = \begin{cases} a + 2(k-1-r)(k+2-r) - 4(k-s), 1 \le r < s \le k; & NNO \\ b - 1 - 2(k-r-1)(k-r+2) + 4(s-k-2), 1 \le r \le k-1, k+2 \le s \le 2k; & NNE \\ b - 2 - 2(s-k-2)(s-k-3) + 4(-s-r+2k+3), r+s > n+1, 2 \le r \le k, k+3 \le s \le n; & ENE \\ a + 3 + 2(s-k-2)(s-k-3) - 4(r-s+1), k+2 \le r < s \le n; & ESE \\ a + 1 + 2(r-k-3)(r-k) - 4(s-k-2), k+3 \le s < r \le n; & SSE \\ b - 2(-k-3+r)(-k+r) + 4(k-s), n+1 < r+s, k+3 \le r \le n, 2 \le s \le k; & SSO \\ b - 3 - 2(k-s-1)(k-s) + 4(r+s-n), r+s < n+1, k+2 \le r \le n-1, 1 \le s \le k-1; & OSO \\ a + 2 + 2(k-s-1)(k-s) - 4(s+1-r), 1 \le s < r \le k; & ONO \\ \frac{a+b}{2} + k + 1 - r, s = r; & \\ n^2 - 1 - 3(r-1), s = n+1-r, 1 \le r \le k; & \\ -3r + 6k + 5, s = n+1-r, k+2 \le r \le n; & \\ n^2 - 2 - 3(s-1), r = k+1, 1 \le s \le k; & \\ 3 + 3(n-s), r = k+1, k+2 \le s \le n; & \\ 3r - 2, s = k+1, 1 \le r \le k; & \\ n^2 - 3(2k+1-r), s = k+1, \quad k+2 \le r \le n. & \end{cases} \qquad (2)$$

Demonstração.

Soma dos elementos da linha central:

$$\sum_{s=1}^{n} l_{k+1,s} = \sum_{s=1}^{k} \left(n^2 - 2 - 3(s-1)\right) + \frac{a+b}{2} + \sum_{s=k+2}^{2k+1} \left(3 + 3(n-s)\right) = \frac{n^3+n}{2} \qquad (3)$$

Soma dos elementos da coluna central:

$$\sum_{r=1}^{n} l_{r,k+1} = \sum_{r=1}^{k} (3r-2) + \frac{a+b}{2} + \sum_{r=k+2}^{2k+1} (n^2 - 6k - 3 + 3r) = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = \frac{n^3+n}{2} \qquad (4)$$

Soma dos elementos da diagonal principal:

$$\sum_{r=1}^{n} l_{r,r} = \left(\frac{a+b}{2} + k + 1 - r\right) = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = c_n \qquad (5)$$

Soma dos elementos da diagonal secundária:

$$\sum_{r=1}^{n} l_{r,n+1-r} = \sum_{r=1}^{k} n^2 - 1 - 3(r-1) + \frac{a+b}{2} + \sum_{r=k+2}^{n} (-3r + 6k + 5) = c_n \qquad (6)$$

Soma de elementos de linhas genéricas.

Soma dos elementos da linha de ordem $r, 1 \le r \le k$:

$$\sum_{s=1}^{n} l_{r,s} = \sum_{s=1,\ (r,s)\in ONO}^{r-1} l_{r,s} + l_{r,r} + \sum_{s=r+2,\ (r,s)\in NNO}^{k} l_{r,s} + l_{r,k+1} + \sum_{s=k+2,\ (r,s)\in NNE}^{(n+1-r)-1} l_{r,s} + l_{r,n+1-r} + \sum_{s=(n+1-r)+1,\ (r,s)\in ENE}^{n} l_{r,s}$$
$$= \left(\sum_{s=1,\ (r,s)\in ONO}^{r-1} l_{r,s} + \sum_{s=(n+1-r)+1,\ (r,s)\in ENE}^{n} l_{r,s} \right) + \left(\sum_{s=r+2,\ (r,s)\in NNO}^{k} l_{r,s} + \sum_{s=k+2,\ (r,s)\in NNE}^{(n+1-r)-1} l_{r,s} \right) + \left(l_{r,r} + l_{r,k+1} + l_{r,n+1-r} \right) \quad (7)$$

A partir da igualdade $l_{r,s} + l_{r,n+1-s} = a + b, (r,s) \in ONO$ segue que

$$\sum_{s=1,\ (r,s)\in ONO}^{r-1} l_{r,s} + \sum_{s=(n+1-r)+1,\ (r,s)\in ENE}^{n} l_{r,s} = (a+b)(r-1) \quad (8)$$

A partir da igualdade $l_{r,s} + l_{r,n+1-s} = a + b, (r,s) \in NNO$ segue que

$$\sum_{s=r+2,\ (r,s)\in NNO}^{k} l_{r,s} + \sum_{s=k+2,\ (r,s)\in NNE}^{(n+1-r)-1} l_{r,s} = (a+b-1)(k-r) \quad (9)$$

Por outro lado:

$$l_{r,r} + l_{r,k+1} + l_{r,n+1-r} = \frac{3}{2}(a+b) + k - r \quad (10)$$

Adicionando ambos os membros de (8), (9) e (10) teremos

$$\sum_{s=1}^{n} l_{r,s} = (a+b)(r-1) + (a+b-1)(k-r) + \frac{3}{2}(a+b) + k - r = c_n \quad (11)$$

Soma dos elementos da linha de ordem $r, k+2 \leq r \leq n$:

$$\sum_{s=1}^{n} l_{r,s} = \sum_{s=1,\ (r,s)\in OSO}^{n-r} l_{r,s} + l_{r,n+1-r} + \sum_{s=n-r+2,\ (r,s)\in SSO}^{k} l_{r,s} + l_{r,k+1} + \sum_{s=k+2,\ (r,s)\in SSE}^{r-1} l_{r,s} + l_{r,n+1-r} + \sum_{s=(r+1),\ (r,s)\in ESE}^{n} l_{r,s} =$$
$$= \sum_{s=1,\ (r,s)\in OSO}^{n-r} \left(l_{r,s} + l_{r,n+1-s} \right) + \sum_{s=n-r+2,\ (r,s)\in SSO}^{k} \left(l_{r,s} + l_{r,n+1-s} \right) + l_{r,n+1-r} l_{r,k+1} l_{r,n+1-r} =$$
$$= (a+b)(n-r) + (a+b+1)(r-k-2) + (-3r+6k+5) + (n^2 - 3(2k+1-r)) + \left(\frac{a+b}{2} + k + 1 - r \right) = c_n \quad (12)$$

Soma de elementos de colunas genéricas.

Soma dos elementos da coluna de ordem $s, 1 \leq s \leq k$:

$$\sum_{r=1}^{n} l_{r,s} = \sum_{r=1,\ (r,s)\in NNO}^{S-1} l_{r,s} + l_{r,n+1-r} + \sum_{r=s+1,\ (r,s)\in ONO}^{k} l_{r,s} + l_{r,k+1} + \sum_{r=k+2,\ (r,s)\in OSO}^{(n+1-s)-1} l_{r,s} + l_{r,n+1-r} + \sum_{r=(n+1-s)+1,\ (r,s)\in SSO}^{n} l_{r,s} =$$
$$= \sum_{r=1}^{s-1} \left(l_{r,s} + l_{n+1-r,s} \right) + \sum_{r=s+1}^{k} \left(l_{r,s} + l_{n+1-r,s} \right) + \left(l_{s,s} + l_{k+1,s} + l_{n+1-s,s} \right) =$$
$$= (a+b)(s-1) + (a+b-1)(k-s) + \left(\left(\frac{a+b}{2} + k + 1 - s \right) + (n^2 - 2 - 3(s-1)) + (-3(n+1-s) + 6k + 5) \right) = c_n \quad (13)$$

A soma dos elementos da coluna de ordem $s, k+2 \leq s \leq n$ é calculada de modo análogo.

Comentários 1.

Notemos que:

a) Quando $n = 1$ o quadrado mágico L definido em (2) é a matriz identidade $L = (1)$;

b) Quando $n = 3$ o quadrado mágico definido pela equação (2) é o famoso quadrado mágico Luo Shu;

c) Quando $n = 5$ o quadrado mágico definido em (2) é:

$L(5) =$

15	7	1	18	24
9	14	4	21	17
23	20	13	6	3
16	5	22	12	10
2	19	25	8	11

(14)

d) Quando $n = 7$ o quadrado mágico definido em (2) é:

$L(7) =$

28	14	18	1	31	35	48
16	27	10	4	39	45	34
20	12	26	7	42	38	30
47	44	41	25	9	6	3
29	37	8	43	24	13	21
33	5	40	46	11	23	17
2	36	32	49	19	15	22

(15)

e) Note que o número central de L é $l_{k+1,k+1} = \frac{1+n^2}{2} = \frac{\frac{n^2}{2}(1+n^2)}{n^2}$, ou seja, o ponto médio geométrico é igual à média aritmética dos números que formam o quadrado mágico;

f) Note que a matriz de ordem $2(k-\rho)+3; 1 \leq \rho \leq k+1$ com centro $l_{k+1,k+1}$ e cantos $l_{\rho,\rho}$, $l_{\rho,n+1-\rho}$, $l_{n+1-\rho,n+1-\rho}$ e $l_{n+1-\rho,\rho}$ e demais entradas sendo as mesmas de L (uma restrição de L) é um quadrado mágico não normal cujo total é igual a $(2(k-\rho)+3)\frac{a+b}{2}$. A demonstração desse resultado mais geral é idêntica à da Proposição 1. Este resultado é surpreendente, pois o total do quadrado mágico não normal da ordem 1 é $\frac{a+b}{2}$, do da ordem 3 é $3\frac{a+b}{2}$, etc. A demonstração desse resultado a partir da Proposição 1 pode ser feita provando que $\sum_{s=1}^{\rho-1} l_{r,s} + \sum_{s=\rho+1}^{n} l_{r,s} = (a+b)(\rho-1) = c_n - (n+2=2\rho)\frac{a+b}{2}; 1 \leq \rho < r \leq k$, por exemplo.

g) Note que a nomenclatura da rosa dos ventos e a notação brasileira usada para as regiões triangulares de L disjuntas de linhas, colunas e diagonais centrais (Figura 1) ampliam o padrão histórico do Luo Shu.

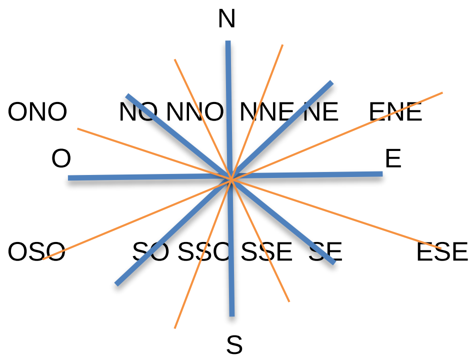

Figura 1. Rosa dos ventos. No Luo Shu estão representados 4 pontos cardeais e 4 pontos colaterais. No Luo Shu generalizado, L, estão representados também os oito pontos subcolaterais. Usamos uma notação que obedece a tradição original chinesa.

Definição 1 (Generalização do Quadrado Mágico Luo Shu). Por motivos óbvios chamaremos o quadrado mágico L definido em (2) como *Luo Shu generalizado de ordem* $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.

Proposição 2. A partir do Luo Shu generalizado podemos estabelecer infinitos métodos de construção de quadrados mágicos de ordens ímpares. Em particular, a partir do Luo Shu generalizado de ordem $n = 2k+1$ podemos construir

$$\left(\prod_{j=1}^{k-1}\left(\left(2(k-j)\right)!\right)\right)^2 \qquad (16)$$

quadrados mágicos.

Demonstração. Sejam l_{r_1,s_1}, l_{r_2,s_2} entradas de L tais que $1 \leq r_i < s_i \leq k$ ou $r_i + s_i < n+1; 2 \leq r_i \leq k; k+2 \leq s_i \leq 2k$ $(i \in I_2)$. Então, $l_{r_i,s_i} + l_{n+1-r_i,s_i} = a+b$. Portanto, se em L trocarmos l_{r_1,s_1} com l_{r_2,s_2} e também trocarmos l_{n+1-r_1,s_1} com l_{n+1-r_2,s_2} obteremos outro quadrado mágico $\tilde{L} = \left(\tilde{l}_{r,s}\right)$ de ordem $n = 2k+1$. Analogamente, se tivermos $\tilde{l}_{r_1,s_1}$, $\tilde{l}_{r_2,s_2}$ tais que $1 \leq s_i < r_i \leq k$ ou $r_i + s_i > n+1; 2 \leq r_i \leq k; k+3 \leq s_i \leq n$ $(i \in I_2)$ então $\tilde{l}_{r_i,s_i} + l_{r_i,n+1-s_i} = a+b$. Trocando $\tilde{l}_{r_1,s_1}$ com $\tilde{l}_{r_2,s_2}$ e também trocando $\tilde{l}_{r_1,n+1-s_1}$ com $\tilde{l}_{r_2,n+1-s_2}$ obteremos outro quadrado mágico. Pelo princípio fundamental da contagem podemos obter (16).

Proposição 3. Seja $1 \leq s_i < r_i \leq k$; $(r_i, s_i) \in ONO; i \in I_2$. Então, se no quadrado mágico generalizado de Luo Shu de ordem n, $L = \left(l_{r,s}\right)_{r,s \in I_n}$, trocarmos, conjuntamente, l_{r_1,s_1} com l_{r_2,s_2}, l_{n+1-r_1,s_1} com l_{n+1-r_2,s_2}, $l_{r_1,n+1-s_1}$ com $l_{r_2,n+1-s_2}$ e $l_{n+1-r_1,n+1-s_1}$ com $l_{n+1-r_2,n+1-s_2}$ obteremos um novo quadrado mágico, o qual terá as mesmas diagonais, linhas e colunas centrais de L.

Demonstração. Temos que

$$l_{n+1-r_i,s_i} = (a+b-1) - l_{r_i,s_i} \quad (17)$$

$$l_{r_i,n+1-s_i} = a+b-l_{r_i,s_i} \quad (18)$$

$$l_{n+1-r_i,n+1-s_i} = 1 + l_{r_i,s_i} \quad (19)$$

O decréscimo na linha de ordem r_1 é $\left(l_{r_1,s_1} - l_{r_2,s_2}\right) + \left(l_{r_1,n+1-s_1} - l_{r_2,n+1-s_2}\right) = 0$.

O decréscimo na coluna de ordem s_1 é $\left(l_{r_1,s_1} - l_{r_2,s_2}\right) + \left(l_{n+1-r_1,s_1} - l_{n+1-r_2,s_2}\right) = 0$.

Os decréscimos na linha de ordem r_2 e na coluna de ordem s_2 são também nulos e a demonstração desse resultado é idêntica aos anteriores.

Corolário 1. A Proposição 3 fornece infinitos métodos de construção de quadrados mágicos e, através dela, podemos construir

$$\left(\frac{k^2-k}{2}\right)! \quad (20)$$

quadrados mágicos a partir do generalizado de Luo Shu de ordem $n = 2k+1$.

Demonstração. Basta notar que toda permutação dos $\frac{k^2-k}{2}$ elementos de ONO é composição de trocas de elementos de ONO. Fazendo-se as trocas em ONO em conjunção com as outras trocas simétricas respectivas em ENE, ESE e OSO sempre resultarão quadrados mágicos com as mesmas linhas, colunas e diagonais centrais do generalizado de Luo Shu.

Proposição 4. Seja $1 \le r_i < s_i \le k$; $(r_i, s_i) \in NNO; i \in I_2$. Então, se no quadrado mágico generalizado de Luo Shu de ordem n, $L = \left(l_{r,s}\right)_{r,s \in I_n}$, trocarmos, conjuntamente, l_{r_1,s_1} com l_{r_2,s_2}, l_{n+1-r_1,s_1} com l_{n+1-r_2,s_2}, $l_{r_1,n+1-s_1}$ com $l_{r_2,n+1-s_2}$ e $l_{n+1-r_1,n+1-s_1}$ com $l_{n+1-r_2,n+1-s_2}$ obteremos um novo quadrado mágico, o qual terá as mesmas linhas, colunas e diagonais de L.

Demonstração. Temos que

$$l_{n+1-r_i,s_i} = (a+b) - l_{r_i,s_i} \quad (21)$$

$$l_{r_i,n+1-s_i} = a+b-1-l_{r_i,s_i} \quad (22)$$

$$l_{n+1-r_i,n+1-s_i} = 1 + l_{r_i,s_i} \quad (23)$$

O decréscimo na linha de ordem r_1 é $\left(l_{r_1,s_1} - l_{r_2,s_2}\right) + \left(l_{r_1,n+1-s_1} - l_{r_2,n+1-s_2}\right) = 0$.

O decréscimo na coluna de ordem s_1 é $\left(l_{r_1,s_1} - l_{r_2,s_2}\right) + \left(l_{n+1-r_1,s_1} - l_{n+1-r_2,s_2}\right) = 0$.

Os decréscimos na linha de ordem r_2 e na coluna de ordem s_2 são também nulos e a demonstração desse resultado é idêntica aos anteriores.

Corolário 2. A Proposição 4 fornece infinitos métodos de construção de quadrados mágicos e, através dela, podemos construir $\left(\frac{k^2-k}{2}\right)!$ quadrados mágicos a partir do generalizado de Luo Shu de ordem $n = 2k+1$.

Demonstração. Basta notar que toda permutação dos $\frac{k^2-k}{2}$ elementos de NNO é composição de trocas de elementos de NNO. Fazendo-se as trocas em NNO em conjunção com as outras trocas simétricas respectivas em NNE, SSE e SSO sempre resultarão quadrados mágicos com as mesmas linhas, colunas e diagonais centrais do generalizado de Luo Shu.

Corolário 3. As proposições 3 e 4, unidas, garantem que podemos estabelecer infinitos métodos de construção de quadrados mágicos de ordens ímpares e, através delas, podemos construir

$$\left(\left(\frac{k^2-k}{2}\right)!\right)^2 \quad (24)$$

quadrados mágicos a partir do generalizado de Luo Shu de ordem $n = 2k+1$.

Demonstração. Basta usar o princípio fundamental da contagem e notar que as permutações em ONO são independentes das permutações em NNO, valendo o mesmo entre as outras entradas correspondentes.

Exemplos 1

Para $k = 0$ teremos um só quadrado mágico, a saber, (1);

Para $k = 1$ teremos um só quadrado mágico, a saber, o Lo Shu;

Para $k = 2$ teremos um só quadrado mágico, a saber, $L(5)$ (Equação (14));

Para $k = 3$ teremos trinta e seis quadrados mágicos.

IV. Conclusão

Ficou estabelecido um novo método de construção de quadrados mágicos o qual constrói quadrados mágicos para todas as ordens ímpares. Para a ordem três o método gera o quadrado mágico Luo Shu, constituindo uma generalização do mesmo. Para cada número ímpar $n \in \mathbb{N}$, a partir da generalização $L(n)$ do quadrado mágico de Luo Shu (o generalizado de Luo Shu de ordem n), podemos fazer muitos outros de mesma ordem n de modo que essa quantidade cresce mais do que exponencialmente com o aumento de n. Isso permite estabelecer infinitos métodos de construção de quadrados mágicos de ordens ímpares. Tanto o generalizado do Luo Shu de ordem n quanto os seus derivados a partir dos infinitos métodos a ele relacionados, possuem propriedades de simetria notáveis. A descoberta desses novos métodos reforça as teses epistemológicas de Nazareno Fonteles, Nagarjuna, Antifonte de Atenas, Zenão e outros filósofos que estudaram as aproximações multifárias. É nossa esperança que a beleza e os padrões de equilíbrio dos generalizados do Luo Shu tenham boas aplicações práticas, como as teve o quadrado mágico de Luo Shu durante esses mais de 4.443 anos.

References

Barbosa Bacelar Miranda, L. (2020). Existe Magia nos Quadrados Mágicos? Disponível em https://www.academia.edu/43798186/Existe_Magia_nos_Quadrados_M%C3%A1gicos. Acesso em: 26 de maio de 2023.

Danielsson, H. (2022). Magic Squares. Disponível em https://magic-squares.info/info/book.html . Acesso em: 28/03/2023.

de Oliveira Miranda. (2023). Quadrados Mágicos dos Métodos Miranda-Miranda: Uma Proposta para Autoestima. Orientadora: Sidneya Magaly Gaya. Monografia de Mestrado, UNEATLANTICO.

de Oliveira Miranda, L. e Barbosa Bacelar Miranda, L. (2012a). Semi-Magic Squares From Snake-Shaped Matrices. Disponível em https://www.slideshare.net/lossian/semimagic-squares-from-snakeshaped-matrices. Acesso em: 5 de jun. 2023.

de Oliveira Miranda & Barbosa Bacelar Miranda, (2012b). Quadrados Semi-mágicos a Partir de "Subset sum". Disponível em http://www.sbpcnet.org.br/livro/64ra/resumos/resumos/4275.htm. Acesso em: 5 de jun. 2023.

de Oliveira Miranda & Barbosa Bacelar Miranda. (2015). Law of the lever and the equilibrium of magic hypercubes (https://impa.br/sobre/memoria/reunioes-cientificas/international-conference-in-number-theory-and-physics/). Disponível em: https://www.academia.edu/37093220/Law_of_the_lever_and_the_equilibrium_of_magic_hypercubes.

de Oliveira Miranda, L. and Barbosa Bacelar Miranda, L. (2016). Little Proposition of the Great Plains. Great Plains Combinatorics Conference. Disponível em https://mathematics.ku.edu/poster-presentations-4

de Oliveira Miranda, L; Barbosa Bacelar Miranda, L. (2018). Stability of Ships with Semimagic Rectangles and Parallelepipeds. In: 4th Brazil-China Symposium on Applied and Computational Mathematics, the Conference BRICS on Mathematics and the International Conference on Industrial Mathematics, Foz do Iguaçu - PR. FOZ2018 PROGRAM. Foz do Iguaçu, p. 01-202.

de Oliveira Miranda, L.; Barbosa Bacelar Miranda, L. (2020a). Lohans' Magic Squares and the Gaussian Elimination Method, JNMS, 3(1), 31-36. DOI: https://doi.org/10.3126/jnms.v3i1.33001.

de Oliveira Miranda, L. e Barbosa Bacelar Miranda, L. (2020b). Generalization of Dürer's Magic Square and New Methods for Doubly Even Magic Squares. JNMS, 3(2),13-15. DOI: https://doi.org/10.3126/jnms.v3i2.33955.

de Oliveira Miranda, Lohans; Barbosa Bacelar Miranda, Lossian e de Oliveira Miranda, Oannes. (2021). Ponderação Consensual por Arbitragem nas Colisões de Princípios na Jurisprudência de Alexy: Teorias Matemáticas e Jusfilosóficas para Evitar o Inferno Eterno – Belo Horizonte, Editora Dialética. ISBN 978-65-5956-002-8. doi.org/10.48021/978-65-5956-002-8.

de Oliveira Miranda, L. e Barbosa Bacelar Miranda, L. (2021). Functions and Methods of Construction of Magic Squares. Disponível em https://www.academia.edu/45172618/Functions_and_Methods_of_Construction_of_Magic_1_Squares_2_Lohans_de. Acesso em: 1012 de set. 2023.

Fonteles, José Nazareno Cardeal. Aproximações Multifárias: uma Introdução. 1 ed. – Teresina: Editora Vortex, 2024.

Miranda, L'hauã B. P.; Miranda, Lohans de O.; and Miranda, Lossian B. B. Computation of Semi-Magic Squares Generated by Serpentine Matrices (2012). Disponível em https://pt.slideshare.net/lossian/sharing-14351041. Acesso em 13 set. de 2020.

Miranda, L. de O. (2020). Quadrados Mágicos dos Lohans: exposição informal. Monografia, Orientador Kelser de Souza Kock, UNISUL, Palhoça-SC.

Miranda, L. de O. & Miranda, L. B. B. (2021). Establishing Infinite Methods of Construction of Magic Squares. Journal of Nepal Mathematical Society, 4(1), 19–22. https://doi.org/10.3126/jnms.v4i1.37108.

[1] Miranda, L. de O. & Miranda, L. B. B. The Four Pandiagonal Magic Squares of Nagarjuna. Disponível em https://pt.slideshare.net/slideshow/the-four-pandiagonal-magic-squares-of-nagarjuna/236949558. Acesso em 24/10/2024.

[2] Miranda, L. de O. & Miranda, L. B. B. (2024). Group Actions on Magic Squares and Hypercubes: Algebraic – Geometric Theory. Disponível em www.academia.edu/116232252. Acesso em 04/08/2024.

Miranda, L. de O. & Miranda, L. B. B. (2024). Esporte Mágico de Luo Shu. Disponível em www.academia.edu/119148694. Acesso em 04/08/2024.

Miranda, L. de O. & Miranda, L. B. B. (2023). Del Hawley's Magic Squares. Disponível em www.academia.edu/109968072. Acesso em 04/08/2024.

STATE COUNCIL OF THE PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA. (2024). Legend of Hetu Luoshu, Luoyang City, Henan Province, 1230 I -136. Available in https://www.gov.cn/zhengce/content/2014-12/03/content_92

Sun Yanzhe. (2020). The Interpretation of the Hetu and Luoshu. Linguistics and Literature Studies 8(4): 190-194, 2020.